10th

Chapter -1

वास्तविक संख्याएँ
Real Numbers

NCERT
Solutions

1.1
Exercise

Q.1. युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से HCF ज्ञात कीजिये

(i) 135 और 225 (ii) 196 और 38220 (iii) 867 और 255

हल:

(1) 135 और 225

$P(x) = 225,$ $g(x) = 135$

सबसे बड़ी संख्या को P(x) तथा सबसे छोटी संख्या को g(x) मानते है

युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से

$P(x) = g(x)q(x) + r(x)$

तब

$225 = 135 \times 1 + 90$

$P(x) = g(x)q(x) + r(x)$

जहाँ $r(x) = 0$ नहीं है (जब तक $r(x) = 0$ नहीं हो जाता है तब तक हमें हल करते रहना है)

फिर से-

$135 = 90 \times 1 + 45$

$P(x) = g(x)q(x) + r(x)$

जहाँ $r(x)=0$ नहीं है (जब तक $r(x)=0$ नहीं हो जाता है तब तक हमें हल करते रहना है)

फिर से-

$90 = 45 \times 2 + 0$

$P(x) = g(x)q(x) + r(x)$

जहाँ $r(x)=0$ है (जब हमें $r(x)=0$ प्राप्त हो जाता है तो हम आगे हल करना बंद कर देते है)

$g(x) = 45$

फिर उसमे से g(x) का मान HCF होता है

HCF = 45

(ii) 196 और 38220

$P(x) = 38220, g(x) = 196$

सबसे बड़ी संख्या को P(x) तथा सबसे छोटी संख्या को g(x) मानते है

युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से

$$P(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

$38220 = 196 \times 195 + 0$

$P(x) = g(x)q(x) + r(x)$

जहाँ $r(x) = 0$ है (जब हमें $r(x) = 0$ प्राप्त हो जाता है तो हम आगे हल करना बंद कर देते है)

$g(x) = 196$

फिर उसमे से g(x)का मान HCF होता है

HCF = 196

(iii) 867 और 255

$P(x) = 867, g(x) = 255$

सबसे बड़ी संख्या को P(x) तथा सबसे छोटी संख्या को g(x) मानते है

युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से

$$P(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

तब-

$38220 = 196 \times 195 + 0$

$P(x) = g(x)q(x) + r(x)$

जहाँ $r(x) = 0$ है (जब हमें $r(x) = 0$ प्राप्त हो जाता है तो हम आगे हल करना बंद कर देते है)

$g(x) = 196$

फिर उसमे से g(x) का मान HCF होता है

HCF = 196

Q.2. दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $6q + 1$, या $6q + 3$, या $6q + 5$, के रूप का होता है जहाँ q कोई पूर्णांक है |

हल:

सिद्ध करना है कि $a = 6q + 1$, $6q+3$ या $6q+5$

माना कि a कोई धनात्मक विषम पूर्णांक है;

$r = 1, 3, 5$ जहाँ $0 \le r < 6$

युक्लिड विभाजन ऐल्गोरिथम से

$a = 6q + r$

चरण -1	चरण -2	चरण -2
$r = 1$ $a = 6q + r$ $a = 6q + 1$	$r = 3$ $a = 6q + r$ $a = 6q + 3$	$r = 5$ $a = 6q + r$ $a = 6q + 5$

अत: किसी धनात्मक विषम पूर्णांक 6q + 1, या 6q + 3, या 6q + 5, रूप का होता है

Q.3. किसी परेड में 616 सदस्यों वाली एक सेना (आर्मी) की टुकड़ी को 32 सदस्यों वाले एक आर्मी बैंड के पीछे मार्च करना है | दोनों समूहों को समान संख्या वाले स्तंभों में मार्च करना है | उन स्तंभों की अधिकतम संख्या क्या है, जिसमें वे मार्च कर सकते है ?

हल:

सेना की टुकड़े के सदस्यों की संख्या 616 है
सेना बैंड में सदस्यों की संख्या 32 है
स्पष्ट है कि स्तंभों अधिकतम संख्या HCF (616, 32)
युक्लिड विभाजन ऐल्गोरिथम से
$P(x) = g(x)q(x) + r(x)$

चरण–1	चरण–2
$616 = 32 \times 19 + 8$ जहां $P(x) = g(x)q(x) + r(x)$ में $r(x) = 0$ नहीं है	$32 = 8 \times 4 + 0$ जहां $P(x) = g(x)q(x) + r(x)$ में $r(x) = 0$ है

- HCF = 8 इसलिए स्तंभों की अधिकतम संख्या = 8

Q.4. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक m के लिए 3m या 3m + 1 के रूप का होता है |

हल :

सिद्ध करना है की $a^2 = 3m$ or $3m + 1$
माना कि a कोई धनात्मक पूर्णांक है
जहां $r = 0, 1, 2$ क्योंकि $0 \le r < 3$
युक्लिड विभाजन ऐल्गोरिथम से
$a = 3q + r$

चरण -1	चरण -2	चरण -3
$r = 0$ $a = 3q + r$	$r = 1$ $a = 3q + r$	$r = 2$ $a = 3q + r$

$a = 3q + 0$ $a=3q$ प्रश्न अनुसार दोनों तरफ़ वर्ग करने पर $a^2 = (3q)^2$ $a^2 = 9q^2$ $a^2 = 3(3q^2)$ जहां $m= 3q^2$ एक पूर्णांक है मान लिया $a^2 = 3m$	$a = 3q + 1$ प्रश्न अनुसार दोनों तरफ़ वर्ग करने पर $a^2 = (3q + 1)^2$ $a^2 = 9q^2 + 1 + 2 \times 3q \times 1$ $a^2 = 9q^2 + 6q + 1$ $a^2 = 3(3q^2 + 2q) + 1$ जहां $m = 3q^2 + 2q$ एक पूर्णांक है मान लिया $a^2 = 3m + 1$	$a = 3q + 2$ प्रश्न अनुसार दोनों तरफ़ वर्ग करने पर $a^2 = (3q + 2)^2$ $a^2 = 9q^2 + 4 + 2 \times 3q \times 2$ $a^2 = 9q^2 + 12q + 4$ $a^2 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1$ जहां $m = 3q^2 + 4q + 1$ एक पूर्णांक है मान लिया $a^2 = 3m + 1$

- अत: किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग कोई भी पूर्णांक m के लिए 3m, 3m + 1 के रूप का होता है
- इसलिए सिद्ध हुआ की $a^2 = 3m$ or $3m + 1$

Q.5. युक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का घन 9m, 9m + 1 या 9m + 8 के रूप का होता है |

हल:

माना, a कोई धनात्मक पूर्णांक है;
युकिल्ड विभाजन प्रमेयिका के प्रयोग से;
$a = 9q + r$ जहाँ; $0 \leq r < 9$

चरण -1 $r = 0$ $a = 9q + 0$ $a = 9q$ प्रश्न अनुसार दोनों तरफ़ घन करने पर $a^3 = (9q)^3$ $a^3 = 9 \times 9 \times 9 \times q^3$ $a^3 = 9(81q^3)$ जहां $m = 81q^3$ एक पूर्णांक है मान लिया $a3 = 9m$	चरण -2 $r = 1$ $a = 9q + 1$ प्रश्न अनुसार दोनों तरफ़ घन करने पर $a^3 = (9q + 1)^3$ $a^3 = (9q)^3 + (1)^3 + 3(9q)^2x1 + 3(9q)x1^2$ $a3 = 729q^3 + 1 + 3 \times 81q^2 + 27q$ $a3 = 9 (81q^3 + 3 \times 9q^2 + 3q) +1$ $a3 = 9(81q^3 + 27q^2 + 3q) + 1$ जहां $m = 81q^3 + 27q^2 + 3q$ एक पूर्णांक है मान लिया $a^3 = 9m + 1$	चरण -3 $r = 2$ $a = 9q + 2$ प्रश्न अनुसार दोनों तरफ़ घन करने पर $a^3 = (9q + 2)^3$ $a^3 = (9q)^3 + (2)^3 + 3(9q)^2 \times 2 + 3(9q)x2^2$ $a^3 = 729q^3 + 8 + 6 \times 81q^2 + 27q \times 4$ $a^3 = 729q^3 + 8 + 6 \times 81q^2 + 27q \times 4$ $a^3 = 9q(81q^2 + 6 \times 9q + 3 \times 4) + 8$ $a3 = 9(81q^2 + 54q + 12) + 8$ जहां $m = 81q^2 + 54q + 12$ एक पूर्णांक है मान लिया $a^3 = 9m + 8$

- अत: किसी धनात्मक पूर्णांक का घन 9m, 9m + 1 या 9m + 8 के रूप का होता है